Задача 0.1. Найти общее действительное решение уравнения

$$13y_{k-1} + 4y_k + y_{k+1} = 0$$

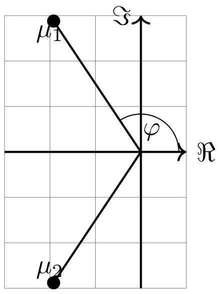
Будем искать решение в виде $y_k = \mu^k$, расссмотрим характеристический многочлен

$$P(\mu) = 13\mu^{k-1} + 4\mu^k + \mu^{k+1} = 0 \Leftrightarrow 13 + 4\mu + \mu^2 = 0$$

$$D = 16 - 4 * 13 = -36 = -1 \cdot 6^2 \Rightarrow \mu_{1,2} = \frac{-4 \pm i \cdot 6}{2} = -2 \pm 3i$$

Запишем решение в действительной форме

$$\Re(\mu_{1,2}) = -2,\ \Im(\mu_{1,2}) = \pm 3$$



$$\rho = \sqrt{\Re(\mu_{1,2})^2 + \Im(\mu_{1,2})^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$\tan\varphi = \frac{\Im(\mu_{1,2})}{\Re(\mu_{1,2})} \Rightarrow \varphi = \pi - \arctan\frac{3}{2}$$

$$y_k = \rho^k (C_1 \cos(\varphi k) + C_2 \sin(\varphi k))$$

Задача 0.2. Найдем ограниченное фундаментальное решение задачи

$$y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1} = \sigma_k^0$$

Так как задача неоднородная, то решение можно представить в виде $y_k = y_k^o + y_k^1$. Найдем общее решение задачи. Для этого решим $y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1} = 0$

$$P(\mu) = 1 - 2\mu + \mu^2 = 0 \Rightarrow \mu = 1 \text{ кратности } 2 \Rightarrow y_k = C_1 + C_2 k$$

Частное решение будем строить с помощью хитрого трюка. Запишем нашу задачу в виде системы

$$\begin{cases} y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1} = 0, \ k \le -1 \\ y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1} = 1, \ k = 0 \Leftrightarrow y_{-1} - 2y_0 + y_1 = 1 \\ y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1} = 0, \ k \ge 1 \end{cases}$$

Так как мы ищем частное решение задачи (ищем любое), то ради удобства занулим решение $\forall\ k \le -1$.
Ищем y_0: подставим в первое уравнение $k = -1$, тогда

$$y_{-2} - 2y_{-1} + y_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0$$

Теперь мы можем найти y_1, посмотрев на второе уравнение:

$$y_{-1} - 2y_0 + y_1 = 1 \Rightarrow y_1 = 1$$

Найдем y_2, чтобы восстановить константы для правой части, подставив $k = 1$ в третье уравнение:

$$y_0 - 2y_1 + y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = 2$$

Для того чтобы найти правую часть частного решения подставим в известное нам общее решение:

$$\begin{cases} 1 = C_1^+ + C_2^+ \\ 2 = C_1^+ + C_2^+ \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1^+ = 0 \\ C_2^+ = 1 \end{cases} \Rightarrow y_k = k, \ k \ge 1$$

Таким образом искомое решение принимает вид

$$y_k = C_1 + C_2 k + \begin{cases} 0, \ k \le 0 \\ k, \ k \ge 1 \end{cases} = \begin{cases} C_1 + C_2 k, \ k \le 0 \\ C_1 + (C_2 + 1)k, \ k \ge 1 \end{cases}$$

$\forall\ C_1,\ C_2$ решение не будет ограниченным, ограниченных решений нет.

Задача 0.3. Найти все решения задачи на собственные значения:

$$\begin{cases} \frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2} = -\lambda y_k, \ h = \frac{2}{2N-1}, \ 1 \le k \le N-1 \\ y_0 = 0 \\ y_N = -y_{N-1} \end{cases}$$

1. Запишем канонический вид. Найдем коэффициенты для краевых условий

$$k = 1: \frac{y_2 - 2y_1}{h^2} = -\lambda y_1$$
$$k = N-1: \frac{y_N - 2y_{N-1} + y_{N-2}}{h^2} = \frac{-3 \cdot y_{N-1} + y_{N-2}}{h^2} = -\lambda y_{N-1}$$

   Таким образом задачу можно переписать в матричном виде:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & & & 0 \\ \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & & \\ & & \cdots & \cdots & & \\ & & & \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\ 0 & & & & \frac{1}{h^2} & \frac{-3}{h^2} \end{pmatrix}}_{N-1 \times N-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix}$$

2. Для более удобного решения сделаем замену $p = 1 - h^2 \frac{\lambda}{2}$ и перепишем условие:

$$\begin{cases} y_{k+1} - 2py_k + y_{k-1} = 0, \ 1 \le k \le N-1 \\ y_0 = 0 \\ y_N = -y_{N-1} \end{cases}$$

   Решим полученненую разностную задачу:

$$P(\mu) = \mu^2 - 2p\mu + 1 = 0 \Leftrightarrow \mu_{1,2} = p \pm \sqrt{p^2 - 1}$$

   Также по теореме Виета:

$$\mu_1 \cdot \mu_2 = 1 \tag{1}$$
$$\frac{\mu_1 + \mu_2}{2} = p \tag{2}$$

   (a) $\mu_1 \ne \mu_2$. Тогда общее решение имеет вид

$$y_k = C_1\mu_1^k + C_2\mu_2^k$$

   Подставим в начальные условия, чтобы найти C_1 и C_2:

$$\begin{cases} y_0 = 0 = C_1 + C_2 \Rightarrow C_2 = -C_1 \\ y_N = -y_{N-1} : C_1\mu_1^N + C_2\mu_2^N = -(C_1\mu_1^{N-1} + C_2\mu_2^{N-1}) \end{cases}$$

   Преобразуем второе равенство, используя первое:

$$C_1(\mu_1^N - \mu_2^N) = -C_1(\mu_1^{N-1} - \mu_2^{N-1})$$

   Если $C_1 = 0$, то $C_2 = 0$, то $y_k \equiv 0$, что нам неинтересно, так как нулевой вектор не является собственным. Иначе

$$\mu_1^N - \mu_2^N = \mu_2^{N-1} - \mu_1^{N-1} \Leftrightarrow \mu_1^N + \mu_1^{N-1} = \mu_2^N + \mu_2^{N-1} \Leftrightarrow \mu_1^{N-1}(\mu_1 + 1) = \mu_2^{N-1}(\mu_2 + 1)$$

   Используем п.1 из теоремы Виета:

$$\mu_1^{N-1}(\mu_1 + \mu_1\mu_2) = \mu_2^{N-1}(\mu_2 + 1) \Leftrightarrow \mu_1^N(\mu_2 + 1) = \mu_2^{N-1}(\mu_2 + 1)$$

   Заметим, что $\mu_2 \ne 1$, так как по теореме Виета $\mu_1 = \mu_2 = 1$ – противоречие с предположением $\mu_1 \ne \mu_2$.

$$\frac{\mu_1^N}{\mu_2^{N-1}} = 1 \Leftrightarrow \mu_1^{2N-1} = 1$$

   Возьмем $2N - 1$ комплексный корень из 1 и получим:

$$\begin{cases} \mu_1^{(m)} = \exp\left(\frac{2m\pi i}{2N-1}\right) \\ \mu_2^{(m)} = \exp\left(-\frac{2m\pi i}{2N-1}\right) \end{cases} \quad m = 0, ..., 2N-2 \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_1^{(m)} = \exp\left(\frac{2(m-1)\pi i}{2N-1}\right) \\ \mu_2^{(m)} = \exp\left(-\frac{2(m-1)\pi i}{2N-1}\right) \end{cases} \quad m = 1, ..., 2N-1$$

Решение имеет вид:

$$y_k = C_1\mu_1^k + C_2\mu_2^k = 2C\left(\frac{\exp\left(\frac{2(m-1)\pi i}{2N-1}\right) - \exp\left(-\frac{2(m-1)\pi i}{2N-1}\right)}{2}\right) = C\sin\frac{2(m-1)\pi k}{2N-1}$$

$$m = 1, ..., 2N-1, \;\; k = 1, ..., N-1$$

Найдем собственные значения. По теореме Виета:

$$p = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} = \frac{\exp\left(\frac{2(m-1)\pi i}{2N-1}\right) + \exp\left(-\frac{2(m-1)\pi i}{2N-1}\right)}{2} = \cos\left(\frac{2(m-1)\pi}{2N-1}\right)$$

$$m = 1, ..., 2N-1$$

$$p = 1 - \lambda\frac{h^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \frac{2}{h^2}\left(1 - \cos\left(\frac{2(m-1)\pi}{2N-1}\right)\right) = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{(m-1)\pi}{2N-1}\right)$$

$$m = 1, ..., 2N-1$$

У матрицы размера $N-1 \times N-1$ не может быть больше $N-1$ собственного значения, но выше мы получили $2N-1$. Отберем корни. Заметим, что при $m = 1$ $\lambda = 0$, такое собственное значение порождает нулевой вектор, так как матрица невырождена, а нулевых собственных векторов нет по определению собственного вектора. Осталось $2N-2$. Покажем, что корни симметричны.
Обозначим $\alpha_m = \frac{\pi(m-1)}{2N-1}$. Тогда

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \frac{\pi}{2N-1} \\
\alpha_3 &= \frac{2\pi}{2N-1} = 2\alpha_1 \\
&... \\
\alpha_{2N-2} &= \frac{\pi(2N-3)}{2N-1} = \pi - \frac{2\pi}{2N-1} \\
\alpha_{2N-1} &= \frac{\pi(2N-2)}{2N-1} = \pi - \frac{\pi}{2N-1}
\end{aligned}$$

То есть углы симметричны относительно $\frac{\pi}{2}$, а значит количество различных корней ровно $N-1$.

(b) $\mu_1 = \mu_2$: из теоремы Виета следует $\mu_1 = \mu_2 = p$ и $\mu_1\mu_2 = 1 \Rightarrow \lambda = 0$ и $\lambda = \frac{4}{h^2}$. Вставим это решение в ответ из случая $\mu_1 \neq \mu_2$

Итоговый ответ:

$$y_k = C\sin\frac{2m\pi k}{2N-1} \qquad m = 1, ..., N-1$$

$$\lambda = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{m\pi}{2N-1}\right) \qquad k = 0, ..., N$$

Задача 0.4.

Задача 0.5. Среди всех многочленов вида $5x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ найти наимее уклоняющийся от нуля на отрезке $[1, 2]$.

1. В классе многочленов степени n удовлетворяющих условию $P_n^{(k)}(0) = c \cdot k! \neq 0$ наименее уклоноящийся от 0 на $[a, b]$ имеет вид:

$$P_n^*(x) = ck! \left(\frac{b-a}{2}\right)^k \frac{T_n\left(\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right)}{T_n^{(k)}\left(\frac{a+b}{a-b}\right)}$$

   В условиях нашей задачи $c = 5,\ k = 3,\ n = 3,\ a = 1,\ b = 2$

$$T_0 = 1,\ T_1 = x,\ T_2 = 2x^2 - 1,\ T_3 = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x,\ T_3^{(3)} = 4 \cdot 3!$$

$$P_n^*(x) = 5 \cdot 3! \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{T_3\left(2x-3\right)}{4 \cdot 3!} = \frac{5}{32} T_3(2x-3)$$

2. Докажем, что такой многочлен действительно наименее уклоняющийся.

   Пусть $\exists \tilde{P}_n^* :\ \left\| \tilde{P}_n^* \right\| < \|P_n^*\|$. Рассмотрим $Q_n = \tilde{P}_n^* - P_n^*$

$$\operatorname{sgn} Q_n|_{x_{(m)}} = (-1)^m,\ m = 0, \ldots, n$$

   То есть Q_n имеет $n + 1$ экстремум, то есть n различных корней. Значит $Q_n^{(k)}$ имеет $n - k$ корней на $[a, b]$, но помимо них есть еще корень 0, так как коэффициенты при x^k совпадают, так как $\tilde{P}_n^*,\ P_n^*$ из одного класса. Таким образом $Q_n^{(k)} \equiv 0 \Rightarrow Q_n$ - многочлен $k - 1$ степени, но корней у него n, значит $Q_n \equiv 0$.

Ответ: $\frac{5}{32} T_3(2x-3) = \frac{5}{32}(32x^3 - 144x^2 + 210x - 99)$

Задача 0.6.

Задача 0.7.

Задача 0.8.

Задача 0.9.

Задача 0.10.

Задача 0.11.

Задача 0.12.

Задача 0.13. Для задачи

$$y' = f(x,y),\ \ f(x,y) = 7y + \sin(2x),\ \ y(0) = 1$$

предлагается выбрать неявную схему Адамса через формулу трапеции

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = \frac{f(x, y(x)) + f(x+h, y(x) + hf(x,y))}{2}$$

1. Покажем аппроксимацию второго порядка

$$\left|\frac{y(x+h) - y(x)}{2} - \frac{f(x, y(x)) + f(x+h, y(x) + hf(x,y))}{2}\right| =$$

$$\left|y'(x) + \frac{h}{2}y''(x) + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2) - \frac{f(x,y) + f(x,y) + hf_x(x,y) + hf_y(x,y)f(x,y) + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)}{2}\right| =$$

$$y' = f(x,y),\ \ y'' = f_x + f_y f$$

$$\left|y'(x) + \frac{h}{2}y''(x) + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2) - y'(x) - \frac{h}{2}y''(x) + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)\right| = \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)$$

2. Проверим α-устойчивость

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = 0 \Rightarrow P(\mu) = \mu - 1 = 0 \Rightarrow \mu = 1$$

Схема имеет второй порядок сходимости и является α-устойчивой. Получим явную расчетную формулу

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = \frac{7y_k + \sin(2x_k) + 7(y_k + h(7y_k + \sin(2x_k))) + \sin(2(x_k + h))}{2}$$

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = 7y_k + \frac{\sin(2x_k) + 49hy_k + 7h\sin(2x_k) + \sin(2(x_k + h))}{2}$$

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k\left(1 + 7h + \frac{49h^2}{2}\right) + h\frac{\sin(2x_k) + 7h\sin(2x_k) + \sin(2(x_k+h))}{2} \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

Задача 0.14. Для задачи

$$-y''(x)+2y(x)=f(x),\ y(0)=1,\ y'(1)=0$$

Построить разностную схему второго порядка аппроксимации на сетке $x_i=ih,\ i=0,\dots,N,\ h=\frac{1}{N}$. Исследовать устойчивость.

В качестве разностного уравнения для разностной схемы предлагается брать

$$-\frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2}+2y_k=f_k,\ h=\frac{1}{N},\ 1\le k\le N-1$$

Такое уравнение обеспечит второй порядок аппроксимации, что мы проверим позже. Осталось подобрать краевые условия для схемы: для $y(0)=1$ обеспечит аппроксимацию любого порядка точное значение $y_0=1$, тогда как для $y'(1)=0$ нужно подобрать что-то особенное: знаем, что $\frac{y_k-y_{k-1}}{h}$ дает первый порядок аппроксимации, предлагается использовать δ-поправку, чтобы получить второй. Будем искать дополнительное слагаемое из условия аппроксимации

$$\left|\frac{y(1)+y(1-h)}{h}-\delta\right|=\left|\frac{y(1)+y(1)-hy'(1)+\frac{h^2}{2}y''(1)+\underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^3)}{h}-\delta\right|=\left|\frac{h}{2}y''(1)+\underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)-\delta\right|\le ch^2\Leftrightarrow\delta=\frac{h}{2}y''(1)=\frac{h}{2}(2y(1)-f(1))$$

Тогда краевое условие будет иметь вид

$$\frac{y_N-y_{N-1}}{h}+\frac{h}{2}(2y_N-f_N)=0\Leftrightarrow 2\frac{y_N-y_{N-1}}{h^2}+2y_N=f_N$$

Итоговая разностная схема имеет вид

$$\begin{cases}-\frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2}+2y_k=f_k,\ h=\frac{1}{N},\ 1\le k\le N-1\\ x_k=kh,\ f_k:=f(x_k),\ p_k:=p(x_k)\\ y_0=1\\ 2\frac{y_N-y_{N-1}}{h^2}+2y_N=f_N\end{cases}$$

$$k=1:\ \frac{y_2-2y_1+1}{h^2}+2y_1=f_1$$

Задача в матричном виде имеет вид:

$$-\begin{pmatrix}\frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & & & 0\\ \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & & & \\ & & \cdots & \cdots & & \\ & & & \frac{1}{h^2} & \frac{-2}{h^2} & \frac{1}{h^2}\\ 0 & & & & \frac{2}{h^2} & \frac{-2}{h^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_N\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_N\end{pmatrix}$$

Будем использовать сеточную интегральную норму

$$\|y_h\|_h^2=(y_h,y_h)_h=\sum_{k=1}^{N-1}y_k^2h$$

согласованной с нормой $\|y(x)\|^2_{L^2(0,1)}=\int_0^1 y^2(x)dx$ исходной задачи.

План:

I. Доказать, что разностная схема имеет порядок аппроксимации $O(h^2)$.

II. Доказать устойчивость разностный схемы.

III. Доказать, что есть сходимость $O(h^2)$.

I. Докажем аппроксимацию второго порядка на решении:

(a) $\|L_h(y)_{Y_h} - f_h\|_{F_h} \le \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)$

$$\max_{x_k}\left|-\frac{y(x_k+h)-2y(x_k)+y(x_k-h)}{h^2}+2y(x_k)-f(x_k)\right| =$$

$$y(x_k \pm h) = y(x_k) \pm hy'(x_k) + \frac{h^2}{2}y''(x_k) \pm \frac{h^3}{6}y'''(x_k) + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^4)$$

$$= \max_{x_k}\left|-\frac{h^2y''(x_k)+\underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^4)}{h^2}+2y(x_k)-f(x_k)\right| =$$

$$= \max_{x_k}\left|-y''(x_k)+\underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)+2y(x_k)-f(x_k)\right| = \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)$$

(b) $\|l_h(y)_{Y_h} - \varphi_h\|_{\Phi_h} \le \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)$

$$y_0 = 1: \ \|y(0)-1\|_{\Phi_h} = 0$$

$$\frac{y_N - y_{N-2}}{2h} = 0: \ \left\|\frac{y(1)-y(1-2h)}{2h}\right\|_{\Phi_h} =$$

$$y\,(1-2h) = y(1) - 2hy'(1) + \frac{4h^2}{2}y''(x_k) + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^3)$$

$$= \left\|-y'(1) + 2hy''(x_k) + \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)\right\|_{\Phi_h} = \underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)$$

(c) Условия нормировки

$$\lim_{h\to 0}\|f_h - (f)_{F_h}\|_{F_h} = 0 \Rightarrow f(x_k) - f(x_k) = 0$$
$$\lim_{h\to 0}\|\varphi_h - (\varphi)_{\Phi_h}\|_{\Phi_h} = 0 \Rightarrow (0\ 0)^T - (0\ 0)^T = 0$$

Значит схема имеет **второй порядок аппроксимации**.

Замечание: Доказали аппроксимацию на решении в $\|\cdot\|_\infty$, но

$$\|x\|_h = \sqrt{\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2 h} \le \max_i |x_i| \sqrt{\sum_{i=1}^{N-1} h} \le \max_i |x_i| \sqrt{\frac{2(N-1)}{2N-1}} \le \max_i |x_i| \cdot 1 = \|x\|_\infty$$

То есть из аппроксимации в $\|\cdot\|_\infty$ следует аппроксимация в $\|\cdot\|_h$.

II. Напомним определение устойчивости разностной схемы.

Опр. 0.1. Пусть уравнение $y''(x) = f(x)$ доопределено краевыми условиями на разных концах отрезка. Разностная схема $A_h y_h = f_h$ линейной задачи устойчива, если существуют C, h_0 такие, что для произвольных $A_h y_h^{(1,2)} = f_h^{(1,2)}$ выполняется оценка

$$\|y_h^{(1)} - y_h^{(2)}\|_h \le C\|f_h^{(1)} - f_h^{(2)}\|_h \ \forall h \le h_0$$

с константой C, не зависящей от h.

Будем доказывать устойчивость разностной схемы энергетическим методом. Запишем нашу дифференциалную задачу

$$-y''(x) + p(x)y(x) = f(x),\ y(0) = y'(1) = 0,\ p(x) \ge 0$$

Умножим уравнение на $y(x)$, и результат проинтегрируем по отрезку $[0, 1]$

$$\int_0^1 (-y''y + py^2)dx = \int_0^1 fydx$$

$$\int_0^1 -y''ydx + \int_0^1 py^2dx = \int_0^1 fydx$$

Проинтегрируем по частям первое слагаемое

$$\int_0^1 -y''ydx = \int_0^1 -ydy' = -yy'|_0^1 - \int_0^1 y'd(-y) = \int_0^1 (y')^2dx$$

Получили интегральное тождество

$$\int_0^1 (y'(x))^2dx + \int_0^1 py^2dx = \int_0^1 fydx$$

Оценим слева через неравенство, связывающее интегралы от квадратов функции и ее производной. Так как $y(0) = 0$, то справедливо следующее:

$$y(x_0) = \int_0^{x_0} y'(x)dx$$

Применим интегральную форму неравенства Коши-Буняковского:

$$|y(x_0)|^2 = \left|\int_0^{x_0} y'dx\right|^2 \le \left(\int_0^{x_0} 1^2dx\right)\left(\int_0^{x_0} (y')^2dx\right) \le \int_0^{x_0} (y')^2dx \le \int_0^1 (y')^2dx$$

После интегрирования по x_0 по отрезку $[0, 1]$ обеих частей получим искомое равенство

$$\int_0^1 |y(x_0)|^2dx_0 \le \int_0^1 (y')^2dx \int_0^1 dx_0 \Leftrightarrow \int_0^1 y^2dx \le \int_0^1 (y')^2dx$$

Оценку справа выведем из разности квадратов:

$$0 \le \int_0^1 (f-y)^2dx \le \int_0^1 f^2dx - 2\int_0^1 fydx + \int_0^1 y^2dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 fydx \le \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f^2dx + \int_0^1 y^2dx\right)$$

Таким образом имеем:

$$\int_0^1 y^2dx \le \int_0^1 (y'(x))^2dx + \int_0^1 py^2dx = \int_0^1 fydx \le \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f^2dx + \int_0^1 y^2dx\right)$$

Таким образом верна оценка

$$\int_0^1 y^2dx \le \int_0^1 f^2dx \Rightarrow \|y\|_{L_2(0,1)} \le \|f\|_{L_2(0,1)}$$

Это означает устойчивость дифференциальной задачи по правой части.

Докажем теперь устойчивость разностной схемы.

$$-\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + p_k y_k = f_k,\ 1 \le k \le N-1,\ y_0 = 0,\ y_N = y_{N-1}$$

Умножим на y_k и просуммируем от 1 до $N-1$. Так как $y_0 = 0,\ y_N = y_{N-1}$

$$-\frac{1}{h^2}\left(\sum_{k=1}^{N-1}(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})\, y_k\right) = -\frac{1}{h^2}\left(\sum_{k=1}^{N-1}(y_{k+1} - y_k - y_k + y_{k-1})\, y_k\right) =$$

$$= -\frac{1}{h^2}\sum_{k=1}^{N-1}(y_{k+1} - y_k)\, y_k + \frac{1}{h^2}\sum_{k=1}^{N-1}(y_k - y_{k-1})\, y_k =$$

$$= -\frac{1}{h^2}\sum_{k=2}^{N}(y_k - y_{k-1})\, y_{k-1} + \frac{1}{h^2}\sum_{k=1}^{N-1}(y_k - y_{k-1})\, y_k = \frac{1}{h^2}\sum_{k=1}^{N}(y_k - y_{k-1})^2$$

Получили конечномерный аналог интегрального тождества:

$$\frac{1}{h^2}\sum_{k=1}^{N}(y_k - y_{k-1})^2 + \sum_{k=1}^{N-1} p_k y_k^2 = \sum_{k=1}^{N-1} f_k y_k$$

Для оценки слева докажем сеточный аналог неравенства для функции и ее производной в точках $k = 1, ..., N-1$. Так как $y_0 = 0$, справедливо следующее:

$$y_k = \sum_{i=1}^{k}(y_i - y_{i-1})$$

Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского и $y_N = y_{N-1}$

$$y_k^2 \le \left(\sum_{i=1}^{k} 1^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k}(y_i - y_{i-1})^2\right) \le (N-1)\sum_{i=1}^{N-1}(y_i - y_{i-1})^2$$

Суммируя до $N-1$ обе части, при $h = \frac{2}{2N-1}$ получаем оценку:

$$\sum_{k=1}^{N-1} y_k^2 \le (N-1)^2\sum_{k=1}^{N-1}(y_k - y_{k-1})^2 \le \frac{1}{h^2}\sum_{k=1}^{N-1}(y_k - y_{k-1})^2$$

Найдем аналогично дифференциальному неравенству оценку справа

$$0 \le \sum_{k=1}^{N-1}(f_k - y_k)^2 = \sum_{k=1}^{N-1} f_k^2 - 2\sum_{k=1}^{N-1} f_k y_k + \sum_{k=1}^{N-1} y_k^2$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{N-1} f_k y_k \le \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N-1} f_k^2 + \sum_{k=1}^{N-1} y_k^2\right)$$

Итоговая оценка имеет вид

$$\sum_{k=1}^{N-1} y_k^2 \le \frac{1}{h^2}\sum_{k=1}^{N-1}(y_k - y_{k-1})^2 + \sum_{k=1}^{N-1} p_k y_k^2 = \sum_{k=1}^{N-1} f_k y_k \le \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{N-1} f_k^2 + \sum_{k=1}^{N-1} y_k^2\right)$$

Таким образом

$$\sum_{k=1}^{N-1} y_k^2 \le \sum_{k=1}^{N-1} f_k^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{N-1} y_k^2 h \le \sum_{k=1}^{N-1} f_k^2 h \Rightarrow \|y_h\|_h^2 \le \|f_h\|_h^2$$

То есть **разностная схема устойчива** в норме $\|\cdot\|_h$.

III. Докажем, что у схемы есть сходимость порядка $\underline{\underline{\mathcal{O}}}(h^2)$.

Теорема 0.1 (Филиппов А.Ф.)**.** *Пусть выполнены следующие условия:*

(a) операторы L, l и L^h, l^h - линейные;

(b) решение дифференциальной задачи $\exists!$;

(c) разностная схема аппроксимирует на решении дифференциальную задачу с порядком p;

(d) разностная схема устойчива;

Тогда решение разностной схемы сходится к решению дифференциальной задачи с порядком не ниже p

Посмотрим на наши результаты

(a) операторы L, l и L^h, l^h - действительно линейные;

(b) решение дифференциальной задачи $\exists!$, так как по условию y и f хорошие гладкие функции.

(c) разностная схема аппроксимирует на решении дифференциальную задачу с порядком 2;

(d) разностная схема действительно устойчива;

Таким образом решение разностной схемы **сходится** к решению дифференциальной задачи **с порядком не ниже** 2.